2.8.7 Kvadratické rovnice s parametrem

Předpoklady: 2507, 2803

Pedagogická poznámka: Na první pohled asi každého zarazí, že takřka celá hodina je psána jako příklady a studenti by ji měli vypracovat samostatně. Je to tak schválně. Kromě úvodního shrnutí situace se studenti nesetkávají s žádnou novou látkou a celou dobu jde pouze o orientaci v příkladu a dodržování úvodního rozboru.
V takových situacích je výuka od tabule mimořádně neefektivní, protože právě tyto úkoly ze studentů snímá.
Rozhodně není třeba se samostatné práce studentů bát, pokud pracovali samostatně v předchozích hodinách, zvládnou to i při této.

Kvadratické rovnice s parametrem – budeme řešit stejně jako kvadratické rovnice bez parametru, ale při dosazování do vzorce $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ musíme dát pozor na:

- jmenovatel $2a$, zda je $a=0$
- výraz pod odmocninou, zda je >0, <0, $=0$ (pak je jediný kořen)

Pedagogická poznámka: Následující příklad dělají studenti samostatně tak napůl. Kontrolujeme si práci po dosazení za $t=0$ a po dosazení do vzorce. Rozdělení výpočtu podle hodnot výrazu pod odmocninou nechávám studentům minimálně pět minut samostatně, pak ho společně uděláme na tabuli. Nakonec mají studenti chvíli na samostatné zkompletování tabulky, kterou jim na závěr nechám promítnutou se zadáním příkladu 2. Zadání příkladů 3 a 4 opíši na tabuli a studenti pak postupují zcela samostatně.

Př. 1: Vyřeš rovnici $tx^2+t^2x+t=0$ s neznámou *x* a parametrem *t*.

$tx^2+t^2x+t=0$

$t\left(x^2+tx+1\right)=0$

Chceme vydělit rovnici *t*, ale nesmíme dělit nulou $\Rightarrow$ vyzkoušíme, jak to dopadne, když $t=0$.

Dosadíme $t=0$.

$0\left(x^2+0\cdot x+1\right)=0$

$0=0$

$K=R$

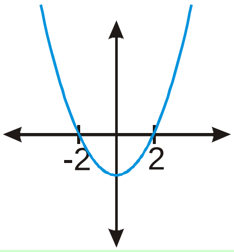
Když $t\neq 0$ můžeme dělit.

$x^2+tx+1=0$

Můžeme dosadit do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice.

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-t\pm\sqrt{t^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$ Ve vzorci je odmocnina $\sqrt{t^2-4}$, tu můžeme spočíst pouze pro nezáporná čísla. Rozdělíme řešení podle hodnot výrazu t^2-4.

$t^2-4=(t-2)(t+2)$



$t^2-4>0 \Leftrightarrow t\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$

děláme odmocniny z kladného čísla, vyjde kladné číslo,

$x_{1,2}=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$ - získáme dva kořeny

$K=\left\{\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}\right\}$

$t^2-4<0 \Leftrightarrow t\in(-2;2)$

pod odmocninou záporné číslo $\Rightarrow$ nejde odmocnit $\Rightarrow$ neexistuje řešení

$K=\emptyset$

$t=-2$ pod odmocninou nula $\Rightarrow$ jediné řešení, zjistíme dosazením

$x_{1,2}=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4}}{2}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{0}}{2}=1 \qquad K=\{1\}$

$t=2$ pod odmocninou nula $\Rightarrow$ jediné řešení, zjistíme dosazením

$x_{1,2}=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{0}}{2}=-1 \qquad K=\{-1\}$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *t*:	**Řešení pro *x*:**
$t=0$	$K=R$
$t\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$	$K=\left\{\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}\right\}$
$t\in(-2;2)-\{0\}$	$K=\emptyset$
$t=-2$	$K=\{1\}$
$t=2$	$K=\{-1\}$

Pedagogická poznámka: Protože se řeší nerovnice $t^2-4>0$, opět se najdou automati, kteří ji vyřeší takto: $t>2$ a dostanou mínus.
Pro řešení příkladu je zásadní, aby si studenti uvědomovali, že řešení nerovnice $t^2-4>0$ slouží pouze k rozhodování o hodnotě výrazu pod odmocninou a rozhodně není vlastním řešením příkladu.
Poměrně často (a z pochopitelných důvodů) zapomínají studenti vyjmout ve třetím řádku z intervalu $(-2;2)$ nulu.

Př. 2: Pomocí závěrečného přehledu předchozího příkladu najdi řešení rovnice $tx^2+t^2x+t=0$ pro následující hodnoty parametru *t*:

a) $t=3$ b) $t=-1$ c) $t=2$
d) $t=0$ e) $t=-10$

a) $t=3$

Druhá řádka přehledu $\Rightarrow$ dva kořeny $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

b) $t=-1$

Třetí řádka přehledu $\Rightarrow$ žádné řešení.

c) $t=2$

Pátá řádka přehledu $\Rightarrow$ $K=\{-1\}$.

d) $t=0$

První řádka přehledu $\Rightarrow$ řešením cokoliv $K=R$.

e) $t=-10$

Druhá řádka přehledu $\Rightarrow$ dva kořeny $x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{96}}{2}=5\pm2\sqrt{6}$.

Pedagogická poznámka: Poměrně často je nutné studentům připomenout, že když znají konkrétní hodnoty *t*, musí je do výrazů z tabulky dosadit.

Př. 3: Vyřeš rovnici $\frac{y^2+3y}{3-a}=1$ s neznámou *y* a parametrem *a*.

$$\frac{y^2+3y}{3-a}=1$$

Rovnice obsahuje zlomek $\Rightarrow$ jmenovatel nesmí být nula. $(3-a)\neq0\Rightarrow3\neq a$

Pro $a=3$ nemůžeme rovnici řešit. $K=\emptyset$

$a\neq3$ - můžeme rovnici vynásobit a odstranit zlomek

$$\frac{y^2+3y}{3-a}=1 \quad /\cdot(3-a)$$

$$y^2+3y=3-a$$

$$y^2+3y-3+a=0$$

Můžeme dosadit do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice:

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-3+a)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+12-4a}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{21-4a}}{2}$$

Ve vzorci je odmocnina $\sqrt{21-4a}$, tu můžeme spočítat pouze pro nezáporná čísla $\Rightarrow$ rozdělíme řešení podle hodnot výrazu $(21-4a)$.

Kdy je tento výraz kladný?

$$21-4a>0$$

$$21>4a$$

$$a<\frac{21}{4}$$

$a\in\left(-\infty;\frac{21}{4}\right)\Rightarrow21-4a>0$

děláme odmocniny z kladného čísla $\Rightarrow$ vyjde kladné číslo, získáme dva kořeny.

$$y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{21-4a}}{2}$$
$$K=\left\{\frac{-3\pm\sqrt{21-4a}}{2}\right\}$$

$$a\in\left(\frac{21}{4};\infty\right)\Rightarrow 21-4a<0$$
pod odmocninou záporné číslo $\Rightarrow$ nejde odmocnit $\Rightarrow$ neexistuje řešení.
$K=\emptyset$

$a=\frac{21}{4}$ pod odmocninou nula $\Rightarrow$ jediné řešení, zjistíme dosazením.

$$y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{21-4a}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{21-4\frac{21}{4}}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{0}}{2}=-\frac{3}{2} \qquad K=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$a=3$	$K=\emptyset$
$a\in\left(-\infty;\frac{21}{4}\right)-\{3\}$	$K=\left\{\frac{-3\pm\sqrt{21-4a}}{2}\right\}$
$a\in\left(\frac{21}{4};\infty\right)$	$K=\emptyset$
$a=\frac{21}{4}$	$K=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Poznámka: Asi správnější by bylo v závěrečném přehledu spojit první a třetí řádek.

Pedagogická poznámka: Trochu překvapivě velké množství studentů má problémy s dosazením celého výrazu $a-3$ za c do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice. Minimálně třetina třídy však příklad spočítá zcela samostatně.

Pedagogická poznámka: Následující příklad stihnou pouze ti opravdu nejlepší, dávám ho dobrovolně na doma a kontrolujeme si ho na začátku příští hodiny.

Př. 4: Vyřeš rovnici $x^2-tx^2+tx-2x+1=0$ s neznámou x a parametrem t.

$x^2-tx^2+tx-2x+1=0$
Upravíme, abychom viděli, jaké jsou hodnoty koeficientů.
$x^2(1-t)+x(t-2)+1=0$

Zkusíme dosadit do vzorce $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Ve jmenovateli vzorce je výraz $2a$ $\Rightarrow$ a se nesmí rovnat nule. $\Rightarrow (1-t)\neq 0\Rightarrow t\neq 1$

Pro $t=1$ nemůžeme rovnici řešit dosazením do vzorce $\Rightarrow$ zkusíme řešení dosazením do rovnice:

$$x^2(1-t)+x(t-2)+1=0$$
$$x^2(1-1)+x(1-2)+1=0$$
$$-x+1=0$$
$x=1$ $\qquad$ $K=\{1\}$

$t\neq 1$- můžeme rovnici řešit dosazením do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(t-2)\pm\sqrt{(t-2)^2-4(1-t\cdot 1)}}{2(1-t)}=\frac{2-t\pm\sqrt{t^2-4t+4-4+4t}}{2(1-t)}$$

$$x_{1,2}=\frac{2-t\pm\sqrt{t^2}}{2-2t}$$

Pod odmocninou $t^2\geq 0$ vždy nezáporné $\Rightarrow$ můžeme odmocnit vždy.

$\sqrt{t^2}=|t|$, platí i $\pm|t|=\pm t$ (v obou případech vystřídáme obě znaménka)

$$x_{1,2}=\frac{2-t\pm\sqrt{t^2}}{2-2t}=\frac{2-t\pm t}{2-2t}$$

$t\neq 0;1$

$x_{1,2}=\frac{2-t\pm t}{2-2t}$ získáme dva kořeny.

$x_1=\frac{2-t+t}{2-2t}=\frac{2}{2-2t}=\frac{1}{1-t}$ $\qquad$ $x_2=\frac{2-t-t}{2-2t}=\frac{2-2t}{2-2t}=1$

$$K=\left\{1;\frac{1}{1-t}\right\}$$

$t=0$

dosazujeme ± 0 $\Rightarrow$ jediné řešení, zjistíme dosazením.

$$x_{1,2}=\frac{2-t\pm t}{2-2t}=\frac{2-0\pm 0}{2-2\cdot 0}=1$$

$K=\{1\}$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *t*:	**Řešení pro *x*:**
$t=1$	$K=\{1\}$
$t\neq 0;1$	$K=\left\{1;\frac{1}{1-t}\right\}$
$t=0$	$K=\{1\}$

Dodatek: 1. a 3. řádek tabulky samozřejmě můžeme spojit do jednoho.

Pedagogická poznámka: Velké většině studentů dělá problémodstranění odmocniny.

Př. 5: Petáková:
strana 22/cvičení 11
strana 22/cvičení 16
strana 22/cvičení 18
strana 22/cvičení 19

Shrnutí: Při řešení kvadratických rovnic s parametrem si musíme dát pozor na dosazení do vzorce a znaménko výrazu pod odmocninou. Řešení případné nerovnice při určování výrazu pod odmocninou není řešením vlastního příkladu.